ПЪРВА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО
24-26. X. 2012 г.

Задачи за група Б

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}$, ако $x=5{,}1$ и $y=3{,}14$.

2. Да се пресметне стойността на израза $x_1^{12}+x_2^{12}$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-5x+11=0$.

3. Да се приведе в нормален вид полинома $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)(x+6)$.

4. За кои стойности на параметъра a полиномът
$$f(x)=x^5+(5-a)x^4-(5a+7)x^3+(7a-29)x^2+(29a+30)x-30a$$
има двукратна нула?

5. Да се реши уравнението $x^4-5x^2+10x-6=0$ в множеството на комплексните числа.

6. Да се определи дефиниционната област на функцията $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-2\right)$.

7. Дадени са матриците $A=\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&2012&x\\0&1&2012\\0&0&1\end{pmatrix}$. За кои стойности на x е вярно равенството $A^{2012}=B$?

8. Да се намери матрицата X, ако $X.\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&24&30\\29&40&51\end{pmatrix}$.

9. Редицата $\{a_n\}$ е зададена с равенствата $a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=a_{n-1}-2a_{n-2}$ за $n=3,4,\ldots$. Да се провери верността на равенството $\begin{pmatrix}a_{102}\\a_{101}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}^{100}.\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

10. Да се изследва и реши системата в зависимост от стойностите на параметъра α
$$\left|\begin{array}{ccccccc}\alpha x_1&+&x_2&+&x_3&=&1\\x_1&+&\alpha x_2&+&x_3&=&1\\x_1&+&x_2&+&\alpha x_3&=&\alpha^2\end{array}\right.$$

11. Да се намери лицето на ΔABC, ако уравненията на страните му са:
$$x+11y-23=0,\ 10x-y-8=0 \text{ и } 11x+10y-142=0.$$

12. Да се намерят координатите на средата на общата хорда на окръжностите $k_1:(x-4)^2+(y-3)^2=10$ и $k_2:(x-7)^2+(y-5)^2=9$.

13. Да се намери уравнението на равнината, която минава през ортогоналните проекции на точка $P(1,3,-2)$ върху трите координатни равнини.

14. Точките $A(1,2,4)$, $B(5,1,3)$, $C(4,2,1)$ и $D(2,x,5)$ са върхове на триъгълната пирамида $ABCD$. За кои стойности на x обемът на пирамидата е равен на 2?

15. Да се начертае графиката на функцията $f(x)=|x-a|+|2x+b|$, ако е известно, че минава през точките $A(1,8)$ и $B(-3,10)$.

16. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\operatorname{cotg}x\right)^{\operatorname{tg}x}$.

17. Да се пресметне $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, ако $f\left(x\right)=\ln\left(\sin 2x+\cos 3x\right)$.

18. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$f\left(x\right)=\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 2 & x & x & x \\ x & x & 3 & x & x \\ x & x & x & 4 & x \\ x & x & x & x & 5 \end{vmatrix} \text{ в интервала } \left[1;5\right].$$

19. Да се намери най-малкото положително решение на уравнението $\sin x=\cos\left(4-x\right)$.

20. Да се намерят корените на уравнението $11\sin 3x=9\ln x$.

21. За кои стойности на параметъра a функцията $f\left(x\right)=\sin x+3a\sin 2x-\dfrac{1}{3}\sin 3x-6ax$ е растяща в интервала $\left(-\infty;+\infty\right)$?

22. Да се намери примитивна функция на функцията $f\left(x\right)=\left|x-1\right|$ в интервала $\left(-\infty;+\infty\right)$.

23. Да се пресметне $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

24. Да се пресметне лицето на равнинната област, определена с неравенството $\left|x\right|^3+\left|y\right|^3\le 8$.

25. Намерете цяло положително число n, за което

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\dots+\frac{1}{n.\left(n+1\right).\left(n+2\right)}=\frac{1013545}{4054182}.$$

26. Да се намерят всички естествени числа $n\in\left[2000;2012\right]$, които са решения на уравнението

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx\right)=\frac{1}{2}.$$

27. За кои реални числа a и b равенството $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(at+bt^2\right)\cos mt\ dt=\frac{1}{m^2}$ е в сила за всяко цяло положително число m?

28. Да се провери дали функцията $y\left(x\right)=\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{4}$ е решение на уравнението

$$y\left(x\right)=\cos x+\int_0^x\left(x-t\right)y\left(t\right)\ dt.$$

29. Да се реши диференциалното уравнение $y''\left(x\right)-5y'\left(x\right)+6y\left(x\right)=\sin 2x+\cos x$ при начални условия $y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0$.

30. Да се намерят всички четирицифрени числа, квадратът на които завършва на 2016.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.