

**ПЪРВА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА
„АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“**

**ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО
24-26. X. 2012 г.**

Задачи за група А

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y}$, ако $x=5,1$ и $y=3,14$.
2. Да се пресметне стойността на израза $x_1^{12} + x_2^{12}$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 5x + 11 = 0$.
3. Да се разложи на неразложими множители с реални коефициенти полинома $f(x) = x^4 + 8x^3 + 8x - 1$.
4. Да се намери най-малкото общо кратно на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, където $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 10x - 6$ и $g(x) = x^4 - 7x^2 - 18$.
5. Да се реши в комплексни числа уравнението $(x+2)^8 - (x-2)^8 = 0$.
6. Да се разложи на неразложими множители над полето \mathbb{Z}_3 полинома $f(x) = x^9 - x$.
7. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2012 & x \\ 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. За кои стойности на x е вярно равенството $A^{2012} = B$?
8. Да се намери матрицата X , ако $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
9. Редицата a_n е зададена с равенствата $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$ за $n = 3, 4, \dots$. Да се провери верността на равенството $\begin{pmatrix} a_{102} \\ a_{101} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
10. Да се изследва и реши системата в зависимост от стойностите на параметъра λ

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$$
11. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако уравненията на страните му са: $x + 11y - 23 = 0$, $10x - y - 8 = 0$ и $11x + 10y - 142 = 0$.
12. Да се намерят координатите на средата на общата хорда на окръжностите $k_1: x - 4^2 + y - 3^2 = 10$ и $k_2: x - 7^2 + y - 5^2 = 9$.
13. Да се намери уравнението на равнината, която минава през ортогоналните проекции на точка $P(1, 3, -2)$ върху трите координатни равнини.
14. Да се начертае графиката на биквадратната функция $f(x) = ax^4 - a + 2x^2 + 3$ в интервала $[-2, 2]$, ако е известно, че минава през точката $A(2, 7)$.

15. Да се пресметне $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 + \cot gx^{\operatorname{tg} x}$.

16. Да се пресметне $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$, ако $f(x) = \ln \sin 2x + \cos 3x$.

17. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 2 & x & x & x \\ x & x & 3 & x & x \\ x & x & x & 4 & x \\ x & x & x & x & 5 \end{vmatrix} \text{ в интервала } [1; 5].$$

18. Да се намери най-малкото положително решение на уравнението $\sin x = \cos 4 - x$.

19. Да се намерят корените на уравнението $11 \sin 3x = 9 \ln x$.

20. За кои стойности на параметъра a функцията $f(x) = \sin x + 3a \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x - 6ax$ е растяща в интервала $-\infty; +\infty$?

21. Да се намери примитивна функция на функцията $f(x) = |x-1|$ в интервала $-\infty; +\infty$.

22. Да се пресметне $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

23. Да се разложи в ред на Тейлър до 10-та степен функцията $f(t)$, която се изразява като детерминанта на квадратната матрица от трети ред $A = (a_{ij})$ с елементи $a_{ij} = \int_{\frac{\pi}{4}}^t \frac{\cos x + \sin x}{i+j} dx$.

24. Да се пресметне лицето на равнинната област, определена с неравенството $|x|^3 + |y|^3 \leq 8$.

25. Намерете цяло положително число n , за което

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1013545}{4054182}.$$

26. Да се намерят всички естествени числа $n \in \{2000; 2012\}$, които са решения на уравнението

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{1}{2}.$$

27. За кои реални числа a и b равенството $\int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos mt dt = \frac{1}{m^2}$ е в сила за всяко цяло положително число m ?

28. Да се провери дали функцията $y(x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{4}$ е решение на уравнението

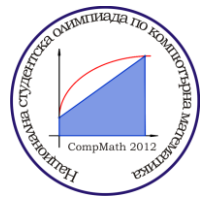
$$y'(x) = \cos x + \int_0^x (x-t) y'(t) dt.$$

29. Да се намерят последните три цифри в десетичния запис на числото $\dots 7^7 \dots^7$, като в дадения израз участват 2012 седмици.

30. Да се намерят всички четирицифрени числа, квадратът на които завършва на 2016.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресметания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.



**ПЪРВА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА
„АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“**

**ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО
24-26. X. 2012 г.**

Задачи за група Б

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y}$, ако $x = 5,1$ и $y = 3,14$.
2. Да се пресметне стойността на израза $x_1^{12} + x_2^{12}$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 5x + 11 = 0$.
3. Да се приведе в нормален вид полинома $x-1 \quad x+2 \quad x-3 \quad x+4 \quad x-5 \quad x+6$.
4. За кои стойности на параметъра a полиномът $f(x) = x^5 + 5-a x^4 - 5a+7 x^3 + 7a-29 x^2 + 29a+30 x - 30a$ има двукратна нула?
5. Да се реши уравнението $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$ в множеството на комплексните числа.
6. Да се определи дефиниционната област на функцията $f(x) = \ln e^{2x} - e^x - 2$.
7. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2012 & x \\ 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. За кои стойности на x е вярно равенството $A^{2012} = B$?
8. Да се намери матрицата X , ако $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$.
9. Редицата a_n е зададена с равенствата $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$ за $n = 3, 4, \dots$. Да се провери верността на равенството $\begin{pmatrix} a_{102} \\ a_{101} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
10. Да се изследва и реши системата в зависимост от стойностите на параметъра α

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = \alpha^2 \end{cases}$$
11. Да се намери лицето на ΔABC , ако уравненията на страните му са: $x+11y-23=0$, $10x-y-8=0$ и $11x+10y-142=0$.
12. Да се намерят координатите на средата на общата хорда на окръжностите $k_1: x-4^2 + y-3^2 = 10$ и $k_2: x-7^2 + y-5^2 = 9$.
13. Да се намери уравнението на равнината, която минава през ортогоналните проекции на точка $P(1, 3, -2)$ върху трите координатни равнини.
14. Точките $A(1, 2, 4)$, $B(5, 1, 3)$, $C(4, 2, 1)$ и $D(2, x, 5)$ са върхове на триъгълната пирамида $ABCD$. За кои стойности на x обемът на пирамидата е равен на 2?
15. Да се начертае графиката на функцията $f(x) = |x-a| + |2x+b|$, ако е известно, че минава през точките $A(1, 8)$ и $B(-3, 10)$.

16. Да се пресметне $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 + \cot g x^{\operatorname{tg} x}$.

17. Да се пресметне $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$, ако $f(x) = \ln \sin 2x + \cos 3x$.

18. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 2 & x & x & x \\ x & x & 3 & x & x \\ x & x & x & 4 & x \\ x & x & x & x & 5 \end{vmatrix} \text{ в интервала } [1; 5].$$

19. Да се намери най-малкото положително решение на уравнението $\sin x = \cos 4 - x$.

20. Да се намерят корените на уравнението $11 \sin 3x = 9 \ln x$.

21. За кои стойности на параметъра a функцията $f(x) = \sin x + 3a \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x - 6ax$ е растяща в интервала $-\infty; +\infty$?

22. Да се намери примитивна функция на функцията $f(x) = |x-1|$ в интервала $-\infty; +\infty$.

23. Да се пресметне $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

24. Да се пресметне лицето на равнинната област, определена с неравенството $|x|^3 + |y|^3 \leq 8$.

25. Намерете цяло положително число n , за което

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1013545}{4054182}.$$

26. Да се намерят всички естествени числа $n \in [2000; 2012]$, които са решения на уравнението

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{1}{2}.$$

27. За кои реални числа a и b равенството $\int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos mt \, dt = \frac{1}{m^2}$ е в сила за всяко цяло положително число m ?

28. Да се провери дали функцията $y(x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{4}$ е решение на уравнението

$$y''(x) = \cos x + \int_0^x (x-t) y'(t) \, dt.$$

29. Да се реши диференциалното уравнение $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \sin 2x + \cos x$ при начални условия $y(0) = y'(0) = 0$.

30. Да се намерят всички четирицифрени числа, квадратът на които завършва на 2016.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.