ТРЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“ СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ 7 – 9 НОЕМВРИ 2014 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Да се пресметне стойността на израза $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\left(2-2\cos\frac{11\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{6}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-1}$.

2. Нека $F(x,y)=\dfrac{\sin(x-y)+\cos(x+2y)}{x+2y}$. Да се пресметне $F\big(2F(x,y),F(y,x)\big)$, при $x=4{,}5$ и $y=3{,}8$.

3. Да се провери дали числото 2 760 727 302 517 е просто.

4. Да се разложи полиномът $1-x-7x^2-10x^3-7x^4-x^5+x^6$ на неразложими множители с реални коефициенти.

5. Да се опрости изразът $2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, където a и b са реални числа.

6. Дадено е квадратното уравнение $x^2-4x+1=0$ с корени x_1, x_2. Да се пресметне стойността на израза $\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^{-14}$.

7. Да се докаже тъждеството $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, където $n\in\mathbb{N}$.

8. Да се намерят целите числа n, за които числото $2014n+2$ се дели на n^2+2.

9. Да се намери най-голямото естествено число $n\le 1000$, което може да се представи във вида $n=\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$, където a и b са естествени числа.

10. Дадена е редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, зададена с равенствата $f_1=2,\ f_2=1,\ f_{3n}=3f_n,\ f_{3n+1}=3f_n+2,$, $f_{3n+2}=3f_n+1$. Да се намери f_{2014}.

11. Дадени са функцията $f(x)=x^{2014}-x^{1989}$ и матрицата $A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\4&5&-4\\3&3&-2\end{pmatrix}$. Да се пресметне $f(A)$.

12. Да се намери несъкратима дроб, която е решение на уравнението:
$x=\sqrt{2015-x}\,\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-x}\,\sqrt{2013-x}+\sqrt{2013-x}\,\sqrt{2015-x}$.

13. Да се реши уравнението $\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$.

14. Да се намери онова решение на системата $\left|\begin{array}{l} 24x^3-10x^2y-3xy^2+y^3=0 \\ x^2+5x=y^2 \end{array}\right.$, за което x е най-голямо.

15. Да се намери най-близкият до 10 корен на уравнението $e^{-x^2}-\cos x=0$.

16. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравнението $(1-m)x^3-3mx^2-3mx+4-m=0$ има три реални корена.

17. Да се намери броят на реалните решения на системата $\left|\begin{array}{l} 5x_{k+1}=x_k^5+3,\ \ k=1,2,\dots,2013 \\ 5x_1=x_{2014}^5+3 \end{array}\right.$.

18. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$.

19. Да се пресметне интегралът $\int\limits_0^{2014}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{2014x-x^2}}$.

20. Да се намери дължината на кривата $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ и лицето на фигурата, заградена от нея.

21. Даден е правоъгълен равнобедрен триъгълник ABC с хипотенуза AB равна на 4. Точката D лежи върху окръжност с център C и радиус 1. Да се намери минималният периметър на триъгълника ABD.

22. През точката $C(3,-1)$ са построени допирателните CA и CB към елипсата Γ: $2x^2+3y^2+x-y-5=0$ ($A\in\Gamma$, $B\in\Gamma$). Да се пресметне лицето на триъгълника ABC.

23. Да се начертае частта от сферата $x^2+y^2+z^2=1$, намираща се в цилиндъра $x^2+y^2=x$.

24. Да се пресметне обемът на тялото, зададено с неравенството $\left(x^2+y^2+z^2+8\right)^2\le 36\left(x^2+y^2\right)$.

25. Да се намери естествено число N, за което уравненията $x^2-2014x+N=0$ и $x^2-2014x-N=0$ имат цели корени.

26. Редицата $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ от естествени числа е такава, че редицата $\left\{\frac{p_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ строго намалява. Да се намери най-малката възможна стойност на p_{681}, ако $p_{2014}=10000$.

27. Да се намери броят на квадратите с лице по-малко от 201400, чиито върхове са с целочислени координати, удовлетворяващи условието $x^4+x^3y^3=y^4+xy$.

28. Да се намери 2014-тата цифра на числото 2014^{2014}.

29. Естественото число n и положителните числа $x_1,x_2,\dots,x_n$ са такива, че $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=2014$. Да се намери най-голямата стойност на $\prod\limits_{k=1}^{n}x_k$.

30. Нека $\frac{1}{1-x-14x^2+x^3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Да се намери границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.