ТРЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
7 – 9 НОЕМВРИ 2014 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА Б

1. Да се намери полином от четвърта степен със старши коефициент 1, на който нулите са с 3 единици по-малки от нулите на полинома $x^4+4x^3-12x^2-29x+56$.

2. Да се намери полином от възможно най-ниска степен, който за $x=1, 2, 3, 4$ приема съответно стойности $y=3, 1, 7, 27$.

3. Да се определят реалните константи a и b, ако се знае, че числото $2-i$ е корен на уравнението $2x^4+x^3-x^2+ax+b=0$.

4. При какви стойности на параметъра a числата x, y и z, определени от системата $\begin{vmatrix} 3x-y+z=5 \\ ax+y-z=0 \\ x+2y+az=17 \end{vmatrix}$ образуват аритметична прогресия в посочения ред.

5. При какви стойности на параметъра a системата $\begin{vmatrix} ax+3y+z=0 \\ x+(a+1)y-z=0 \\ (2a-1)x+2y+4z=0 \end{vmatrix}$ има ненулево решение?

6. Да се докаже, че ако a, b, c и d са различни цели числа, то детерминантата $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$ се дели на $(a-c)^2+(b-d)^2$.

7. Точка C лежи на правата $a: x+y=2014$. Ако $A(2,0)$, $B(1,4)$ и лицето на триъгълника ABC е 2015, да се намерят координатите на точка C.

8. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от кривата $y=2-4x^2+4x^3-x^4$, абсцисната ос и правите $x=x_1$ и $x=x_2$, където x_1 и x_2 са точките, в които y има локален максимум.

9. Да се намерят всички четирицифрени числа, които са равни на сбора от четвъртите степени на цифрите си.

10. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2+\cos\frac{\pi}{n}}+\dfrac{1}{2+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{2+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$.

11. Да се докаже тъждеството $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

12. Сравнете стойността на израза $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$ с числото $\dfrac{\pi}{4}$.

13. Решете уравнението $\sin x=\log_{10}x$.

14. Пресметнете сумата $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ и сравнете с 2014 стойността на интеграла $\int\limits_0^{2014} \mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2014}}{2014!}\right)\mathrm{d}x$.

15. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравнението $(1-m)x^3-3mx^2-3mx+4-m=0$ има три реални корена.

16. Върху хиперболата $xy=-1$ са взети точките A_n и B_n съответно с абсциси $\frac{n}{n+1}$ и $\frac{n+1}{n}$. Да означим с M_n центъра на окръжността, която минава през точките A_n, B_n и точка $C(1,-1)$. Да се намери границата на редицата от точки $\{M_n\}$ при $n\to\infty$.

17. Да се намери пресечната точка на равнините $\alpha: 7x-5y+2z-41=0$, $\beta: 4x+3y-11z+49=0$ и $\gamma: 2x+3y+4z-20=0$.

18. Да се намери най-голямата стойност на функцията $y=2\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^2x$ в интервала $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

19. Функцията $y=\frac{ax+b}{(x-20)(x-14)}$ има локален екстремум, равен на 1 при $x=2014$. Намерете a и b и определете вида на екстремума.

20. Да се реши уравнението $\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$.

21. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

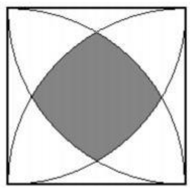
22. Намерете диференциалното уравнение на фамилията линии $y=\frac{x^2-C^2}{2C}$.

23. През точката $M(2,4)$ са прекарани допирателни към параболата $y=-x^2+5x-6$. Да се намери лицето на „криволинейния“ триъгълник, образуван от двете допирателни и параболата.

24. Дадени са две окръжности. Първата е с център точка $M(0,5)$ и радиус 3, а втората – с център точка $N(10,7)$ и радиус 2. Да се намерят точка A върху първата окръжност, точка B върху втората окръжност и точка C върху абсцисната ос, така че сумата от трите разстояния $AB+BC+AC$ да бъде минимална. Направете чертеж, визуализиращ дадените окръжности и намереното решение.

25. Намерете дължината на кривата $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ и лицето на фигурата, заградена от кривата.

26. Коя е 2014-тата цифра на числото 2014^{2014}?



27. С центрове четирите върха на квадрат със страна 1 са построени 4 четвъртинки окръжности. Намерете лицето на тъмната част от фигурата.

28. От точка $A(-3,0)$ към точка $B(0,2)$ тръгва светлинен лъч, който се отразява от елипсата $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ първо в точка C, а след това в точка D. Намерете координатите на точка D.

29. Намерете обема на тялото, оградено от равнините $y=1$ и $z=0$, параболичния цилиндър $y=x^2$ и параболоида $z=x^2+y^2$.

30. Докажете, че инфлексните точки на графиката на функцията $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ лежат на една права.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.