II НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“, 17-19 ОКТОМВРИ 2013 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА Б

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$, ако $x=2$ и $y=-1,5$.

2. Да се пресметне стойността на израза $x_1^8+x_2^8-3x_1x_2$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-5x+11=0$.

3. Да се опрости изразът $\dfrac{2-x}{x+1}\cdot\dfrac{3x^4-24x^3-3x^2+204x-252}{220x-70x^2-168-15x^3+10x^4-x^5}$.

4. Да се разложи на неразложими множители с реални коефициенти полинома $f(x)=x^4-4x^3+x^2-8x-2$.

5. Да се намери за кои цели стойности на n стойността на израза $\dfrac{n^4+2n^3-3n^2+n-94}{n-3}$ е цяло число.

6. Дадена е матрицата $A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Да се пресметне A^{2013}.

7. Да се реши уравнението $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

8. Да се пресметне рангът на матрицата $A=\begin{pmatrix}a & 4 & 10 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ в зависимост от стойностите на параметъра a.

9. Дадени са точките $A(2,-1)$ и $B(1,0)$. Да се намери геометричното място на точки в равнината, които са върхове C на триъгълник ABC с лице 10.

10. В декартова координатна система са дадени равнината $\alpha: x-2y+z+3=0$ и точките $A(0,-1,1)$ и $B(1,2,3)$. Да се намери пресечната точка на правата AB и равнината α.

11. Редицата $\{a_n\}$ е зададена с равенствата $a_1=1$, $a_2=0$, $2a_{n+1}=2a_n+a_{n+2}$ за $n\geq 1$. Да се пресметне a_{2013}.

12. Да се намерят три различни цели числа a, b и c, за които корените на уравнението $x^3+ax^2+bx+c=0$ са a, b и c.

13. Ако $f(x)=x^{x^x}$, пресметнете $f'(2)$ с точност четири верни знака след десетичната запетая.

14. Да се докаже, че уравнението $\dfrac{2x}{1+x^4}+\cos x=\dfrac{\pi}{4}+\sin 1$ има решение в интервала $(0,1)$.

15. Да се докаже, че ако k е естествено число, то $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2^k}+\operatorname{arctg}\dfrac{2^k-1}{2^k+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

16. Да се начертае графиката на функцията $f(x)=x^4+4x^3-17118x^2+23996x+64015517$ така, че на графиката да се виждат локалните екстремуми на функцията и нулите ѝ.

17. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}x-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-x.$

18. Да се намерят реалните числа a, b и c така, че допирателните към графиката на функцията $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ в точките с абсциси -2 и 2 да сключват с абсцисната ос ъгли с големини съответно 45° и 60° и най-голямата стойност на $f(x)$ в интервала $\left[-2,2\right]$ да е два пъти по-голяма от най-малката ѝ стойност в този интервал.

19. Да се пресметне дължината на дъгата, определена от графиката на функцията $f\left(x\right)=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}.$

20. Да се пресметне лицето на криволинейния четириъгълник, ограничен от дъгите на елипсите $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ и $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1.$

21. Да се пресметне $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(4^x+1\right)\left(x^2+4\right)}.$ Решението да бъде точно или с поне шест верни знака след десетичната запетая.

22. Да се провери верността на равенството $\displaystyle\int_0^\pi xf\left(\sin x\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\left(\sin x\right)\,dx,$ ако $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x^2+6}.$

23. Нека $a<b<c<d.$ Да се докаже неравенството
$$\begin{vmatrix}\displaystyle\int_a^b 1dx & \displaystyle\int_a^b xdx & \displaystyle\int_a^b x^2dx\\ \displaystyle\int_a^c 1dx & \displaystyle\int_a^c xdx & \displaystyle\int_a^c x^2dx\\ \displaystyle\int_a^d 1dx & \displaystyle\int_a^d xdx & \displaystyle\int_a^d x^2dx\end{vmatrix}>0.$$

24. Да се пресметне $\displaystyle\int_0^4 xf\left(x\right)dx,$ където реалната функция $y=f\left(x\right)$ удовлетворява уравнението $y^3+3y=x.$

25. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f\left(x\right)=\displaystyle\int_0^x\left(1-t^2\right)^5dt$ в интервала $\left[0;2\right].$

26. От всички прави, минаващи през точка $M\left(1,4\right),$ да се намери тази, която отсича от хиперболата $xy=3$ фигура с най-малко лице.

27. Да се пресметне сумата $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}.$

28. Да се пресметне границата $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{\left(n-1\right)\pi}{n}\right).$

29. Дадени са векторите $a_i=\left(\dfrac{1}{i},\dfrac{1}{i+1},\ldots,\dfrac{1}{i+n-1}\right),$ $i=1,2,\ldots,n$. Ако с $a_i\cdot a_{i+1}$ е означено скаларното произведение на a_i и a_{i+1}, да се пресметне $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i\cdot a_{i+1}\right)^{-1}\right].$

30. Да се начертае графиката на функцията $y\left(x\right),$ където $y\left(x\right)$ е решение на диференциалното уравнение $y''\left(x\right)=2y\left(x\right)+1$ при начални условия $y\left(0\right)=1$ и $y'\left(0\right)=0.$

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.