II НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“, 17-19 ОКТОМВРИ 2013 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{88,2\sqrt[4]{333-\sqrt[5]{2+4,5}}}$.

2. Да се намерят естествените числа *a* и *b*, ако сумата им е 5432, а най-малкото им общо кратно е 223020.

3. Да се разложи на неразложими множители с реални коефициенти полинома $f(x)=x^4-4x^3+x^2-8x-2$.

4. Да се пресметне z^{60}, ако $z=-1+i\sqrt{3}$.

5. Да се намери решение на Диофантовото уравнение $4x+19y=5$ в интервала $(-15,5)$.

6. Да се намерят три различни цели числа *a*, *b* и *c*, за които корените на уравнението $x^3+ax^2+bx+c=0$ са *a*, *b* и *c*.

7. Дадени са векторите $a_i=\left(\frac{1}{i},\frac{1}{i+1},\dots,\frac{1}{i+n-1}\right)$, $i=1,2,\dots,n$. Ако с $a_i\cdot a_{i+1}$ е означено скаларното произведение на a_i и a_{i+1}, да се пресметне $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i\cdot a_{i+1}\right)^{-1}\right]$.

8. Да се намерят целочислените 2×2 матрици *A* със следа -1, за които $A^2+A^T=E$.

9. Да се реши уравнението $A.X.A=B$, където $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\3&-4&1\\2&2&-1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&4&-1\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

10. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=6\\4x_1+x_2+5x_3+x_4+x_5=20\end{array}\right.$.

11. Да се пресметне рангът на матрицата $A=\begin{pmatrix}a&4&10&1\\3&1&1&4\\1&7&17&3\\2&2&4&1\end{pmatrix}$ в зависимост от стойностите на параметъра *a*.

12. Нека $f_1=f_2=1$, $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ са числата на Фибоначи, а $Q=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$. Да се докаже, че $Q^{2013}=\begin{pmatrix}f_{2014}&f_{2013}\\f_{2013}&f_{2012}\end{pmatrix}$.

13. Да се докаже, че ако k е естествено число, то $\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}+\operatorname{arctg}\frac{2^k-1}{2^k+1}=\frac{\pi}{4}$.

14. Да се намерят реалните числа *a*, *b* и *c* така, че допирателните към графиката на функцията $f(x)=ax^2+bx+c$ в точките с абсциси -2 и 2 да сключват с абсцисната ос ъгли с големини съответно 45° и 60° и най-голямата стойност на $f(x)$ в интервала $[-2,2]$ да е два пъти по-голяма от най-малката ѝ стойност в този интервал.

15. От всички прави, минаващи през точка $M(1,4)$, да се намери тази, която отсича от хиперболата $xy=3$ фигура с най-малко лице.

16. Да се пресметне дължината на дъгата, определена от графиката на функцията $f(x)=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

17. Да се намери втората производна на функцията $f(x)=x^x$.

18. Да се изследва за непрекъснатост функцията $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$, да се пресметнат локалните ѝ екстремуми и да се начертае нейната графика в интервала $[-10,5]$.

19. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=\int_0^x (1-t^2)^5dt$ в интервала $[0;2]$.

20. Да се пресметне $\int_0^4 xf(x)dx$, където реалната функция $y=f(x)$ удовлетворява уравнението $y^3+3y=x$.

21. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=\operatorname{arctg}x-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-x$.

22. Нека $a<b<c<d$. Да се докаже неравенството $\begin{vmatrix} \int_a^b 1dx & \int_a^b xdx & \int_a^b x^2dx \\ \int_a^c 1dx & \int_a^c xdx & \int_a^c x^2dx \\ \int_a^d 1dx & \int_a^d xdx & \int_a^d x^2dx \end{vmatrix}>0.$

23. Да се пресметне $\int_0^{2\pi}\dfrac{1+\cos x}{(\sin x+\cos x+2)^3}dx$, като решението се запише с точност осем знака след десетичната запетая.

24. Да се пресметне сумата $\dfrac{1}{2.3}-\dfrac{2}{3.4}+\dfrac{3}{4.5}-\cdots+\dfrac{2011}{2012.2013}$ с точност шест верни знака след десетичната запетая.

25. Нека $S(k,n)=\sum_{i=1}^n i^k$. Да се докаже, че $\sum_{t=0}^n\dfrac{S(2,3t+1)}{S(1,3t+1)}$ винаги е точен квадрат.

26. Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

27. Да се провери верността на равенството $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$, ако $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+6}$.

28. Да се реши диференциалното уравнение $y''(x)=2y(x)+1$ при начални условия $y(0)=1$ и $y'(0)=0$.

29. Да се намери най-малкото просто число $p>11$, всички цифри на което в десетичен запис са само единици.

30. В каква бройна система е вярно равенството $14414+3403=23322$?

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.