



**ПЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“
28-30 ОКТОМВРИ 2016 Г.**

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

- Покажете, че целите части на числата $\sqrt{2016 + \sqrt[3]{2016}} - \sqrt[3]{2016 + \sqrt[4]{2016}}$ и $\sqrt{2016 + \sqrt[3]{2016}} - \sqrt[3]{2016 + \sqrt[4]{2016}} - \sqrt[4]{2016 + \sqrt[5]{2016}}$ са точни степени на естествени числа.
- Да се пресметне стойността на израза $\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}$.
- Да се опрости изразът $\left(\frac{(a^{\frac{3}{2}} - \sqrt{8})(\sqrt{a} + \sqrt{2})}{a + \sqrt{2a} + 2}\right)^2 + \sqrt{(a^2 + 2)^2 - 8a^2}$, където a е реално число.
- Да се намерят корените на полинома $f(x) = x^3 - 681x + 2016$ с точност 10 знака след десетичната запетая.
- Да се пресметне стойността на $x^3 - 2ix^2 + 3x - 1 + 2i$ ако $x = 3 - 2i$.
- Да се намерят всички решения в естествени числа на уравнението $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$, за които $x \leq y \leq z \leq t \leq 24$.
- Да се намери мултипликативният обратен на полинома $1 + x^2 + x^3$ по модул $(1 + x^2 + x^5)$ над полето \mathbb{Z}_2 (т.е. полином $g(x)$, такъв че $g(x)(1 + x^2 + x^3) = 1 \pmod{1 + x^2 + x^5}$ над \mathbb{Z}_2).
- За кои стойности на естественото число $n, n < 55$, полиномът $x^{2n} + 16x^n + 8n$ може да се разложи на множители с цели коефициенти?
- Да се докаже, че $\frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \dots + \frac{85^{85}}{86^{86}} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{85^{2^2}}$
но $\frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \dots + \frac{85^{85}}{86^{86}} + \frac{86^{86}}{87^{87}} > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{85^2} + \frac{1}{86^2}$.
- Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & x^2 & x^3 \\ x & 0 & x & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 4 \end{vmatrix}$ в интервала $[0, 2016]$.
- Дадени са функцията $f(x) = x^5 - 2x^3 - 11$ и матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Да се пресметне $f(A)$.
- Да се реши системата от матрични линейни уравнения $\begin{cases} (I + J)X + (2I + \sqrt{3}J)Y = (2 + \sqrt{3})I + 5J \\ (\sqrt{3}I - J)X + (I + \sqrt{3}J)Y = (1 - \sqrt{3})(I + \sqrt{3}J) \end{cases}$, където $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Дадени са матриците $A_n = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.
Да се намери коефициентът пред x^{2014} в развитието на $\det A_{2016}$.

14. Да се намерят реалните корени на уравнението $e^x = x^4$.
15. Да се намерят корените и локалните екстремуми на функцията $f(x) = 2 + x^3 - x - \sin x$.
16. Да се намери уравнението на асимптотата на функцията $y = 2x - \frac{8x-4}{x^2+1}$. Да се намерят уравненията на допирателните към графиката на функцията, които са успоредни на асимптотата. На една и съща координатна система да се начертаят графиката на функцията, асимптотата и допирателните.
17. Правата с уравнение $x + y = 2$ разделя площта на фигурата, оградена от кривата с уравнение $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ на две части. Да се изчисли лицето на по-малката част. Направете чертеж.
18. Ъгловият коефициент k на функцията $f(x)$ в точката x се изразява с равенството $k = 4x^3 - 3\sqrt{x}$. Да се определи $f(x)$, ако точката $M(1,0)$ лежи на графиката ѝ. Да се начертаят графиката на функцията и допирателната към графиката в точката M .
19. Дадена е функцията $f(x) = e^x \cos x$. Да се докаже, че частното $f^{(256)}(x)/f(x)$ между 256-та производна производна и функцията е точна степен на просто число.
20. Да се начертаят графиката на кривата, зададена с параметрични уравнения:
 $x = 3 \sin t, \quad y = 3 \sin t \cos t$. Да се намери лицето на фигурата, заградена от тази крива.
21. Да се намери естествено число n , за което $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{508788}{2035153}$.
22. Да се пресметне лицето на фигурата, зададена с неравенствата $x^4 + y^4 \leq 1, \quad x^3 \leq y^2$.
23. Да се пресметне $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{20^k}{k!} - \frac{16^k}{(k-1)!} \right)$.
24. Да се пресметне $\int_{10}^{29} \frac{x^2}{\sin x + 2016} dx$.
25. Да се намери лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите $f(x) = e^{1-|x|}$ и $g(x) = e^{2-x^2}$. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено при въртенето на графиката на $f(x)$ около оста Ox .
26. Да се докаже, че $2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right)^2 = 5 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \right)$.
27. Да начертаят графиката и да се намери най-голямата стойност на функцията
- $$f(x) = \begin{cases} 1 - \sin 8x, & x < 0 \\ 1 - x^2, & 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 1, & 1 \leq x \end{cases} \text{ в интервала } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$
28. Дадена е редицата $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1}^2 - k a_{n-2}^2 - 2016, n > 2$, където k е естествено число. Да се намери най-малката стойност на k , за която $a_4 < 8000000$.
29. Измежду първите 20160 прости числа да се намерят тези, в десетичния запис на които се среща последователността 2016.
30. Да се намери най-малкото естествено число n , за което $100^n < n!$. Кое е по-голямо: 100^{300} или $300!$?

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.