

**ПЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА  
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“  
ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“  
28-30 ОКТОМВРИ 2016 Г.**

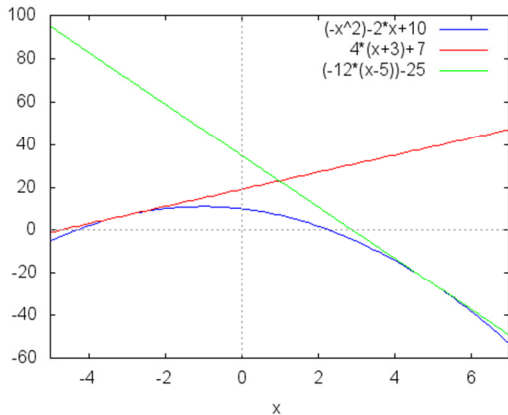
**ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА В**

1. Да се пресметне стойността на израза  $-z^4 + 2z^3 + 4z - 4 - 520i$  при  $z = 5(1 + i)$ .  
Отг. 2016
2. Намерете най-малката стойност на  $n$ , за която  $S(n) = \frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \dots + \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} > 1$ .  
Отг.  $n = 15$ ;  $S(14) = 0.9894230260892308$ ;  $S(15) = 1.013161301452684$
3. Да се реши уравнението  $x^3 - 2016x^2 + 681 = 0$ .  
Отг.  $-0.5811198461839471, 0.5812874045545816, 2015.999832441629$
4. Да се пресметне стойността на израза  $\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}$ .  
Отг. 1
5. Да се намерят локалните екстремуми на функцията  $f(x) = 2 + x^3 - x - \sin x$ .  
Отг.  $f(-0.7584812603126528)=3.009951490760541$ ,  $f(0.7584812603126528)=0.9900485092394591$
6. Да се пресметне детерминантата  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 28 & 30 & 10 & -5 \\ 16 & -9 & 1 & 7 \\ 27 & -7 & 13 & 4 \end{vmatrix}$ .  
Отг. 42279
7. Да се пресметне  $\sqrt{2016 - \sqrt[3]{2016}} - \sqrt[3]{2016 + \sqrt[4]{2016}} + \sqrt[4]{2016 - \sqrt[5]{2016}} - \sqrt[5]{2016 + \sqrt[6]{2016}}$   
Отг. 34.2272618706267
8. Да се реши уравнението  $e^x = 2x^2$ .  
Отг.  $-0.5398352769028201, 1.487962065498177, 2.617866613066813$
9. Да се разложи на неразложими множители с реални коефициенти полиномът  $x^{12} + 4x^{11} + 5x^{10} + 4x^9 - 4x^8 - 20x^7 - 25x^6 - 20x^5 - x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 16x + 4$ .  
Отг.  $(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$



15. През точката  $M(1, 23)$  са построени допирателните  $MA$  и  $MB$  към параболата  $y = 10 - x^2 - 2x$  (точките  $A$  и  $B$  лежат на параболата). Да се намери дължината на дъгата от параболата от точка  $A$  до точка  $B$  и лицето на криволинейния триъгълник  $ABM$ . Да се направи чертеж.

Отг.  $l = \frac{\operatorname{asinh}(12)+12\sqrt{145}}{4} + \frac{\operatorname{asinh}(4)+4\sqrt{17}}{4} = 41.56651385823479$ ;  $s = \frac{128}{3} = 42.666666666666666$



16. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено при въртенето около оста  $Oy$  на криволинейния триъгълник, определен с неравенствата  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin x \leq y \leq 1$ .

Отг.  $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4} = 1.468383862895368$

17. Кривата  $y = e^{-x}$ ,  $x \in [0, \infty)$  е завъртяна около оста  $Ox$ . Намерете лицето на получената ротационна повърхнина.

Отг. 7.211799724207046

18. Да се реши диференциалното уравнение  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$  при начални условия  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

Отг.  $y(x) = (1 - x)e^x - \frac{1}{2}e^x \ln(x^2 + 1) + xe^x \operatorname{arctg} x$

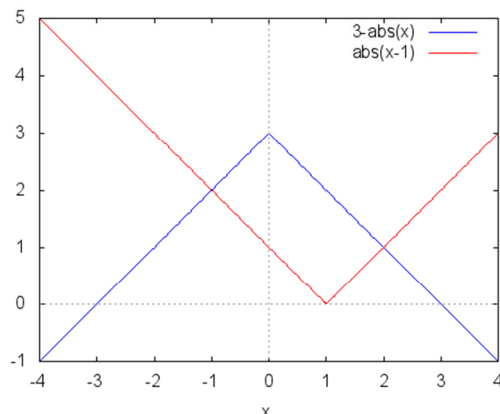
19. В координатна система с единична отсечка с дължина 1 m са дадени точките:  $A(3, 1, -6)$ ,  $B(1, 2, -3)$ ,  $C(2, 0, 5)$  и  $D(-2, 1, 2)$ . Точката  $M$  тръгва от точка  $A$  по посока на точка  $B$ , като се движи със скорост 2 m/s, а точката  $N$  тръгва в същото време от точка  $C$  по посока на точка  $D$ , като се движи със скорост 3 m/s. След колко секунди разстоянието между точките  $M$  и  $N$  ще бъде най-малко?

Отг.  $\frac{315\sqrt{26}+442\sqrt{14}}{1183} = 2.755708970190878$

20. Да се намери лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите  $y = |x - 1|$  и  $y = 3 - |x|$ .

Да се направи чертеж.

Отг. 4

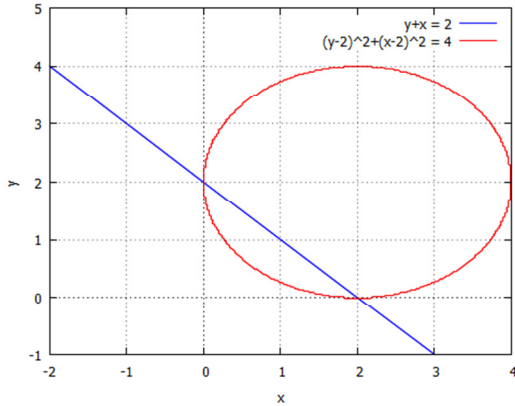


21. Точките  $A(-\frac{72}{25}, \frac{7}{25})$  и  $B(0, -1)$  лежат на елипсата  $x^2 + 9y^2 = 9$ . Да се намери точка  $C$  върху елипсата, така че триъгълникът  $ABC$  да има най-голямо лице.

Отг.  $C(\frac{12}{5}, \frac{3}{5})$

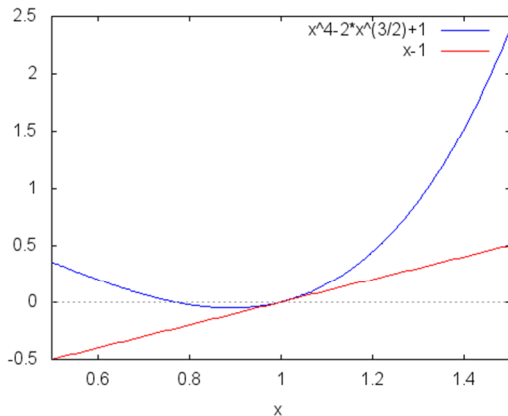
22. Правата с уравнение  $x + y = 2$  разделя площта на фигурата, заградена от кривата с уравнение  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$  на две части. Да се намери лицето на по-голямата част. Да се направи чертеж.

Отг.  $3\pi + 2$



23. За функцията  $f(x)$  е известно, че минава през точката  $M(1,0)$  и  $f'(x) = 4x^3 - 3\sqrt{x}$ . Да се начертаят графиката на функцията  $f(x)$  и допирателната в точката  $M$ .

Отг.  $f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x} + 1$



24. Да се намерят асимпютите на функцията  $f(x) = \frac{x}{2} - \arccos \frac{2}{x}$ .

Отг.  $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$

25. Да се реши уравнението  $\arcsin 3x = \arccos 4x$ .

Отг. 0.2

26. Да се реши уравнението  $2^x = 2x$ .

Отг. 1; 2

27. Да се намери лицето на криволинейния трапец, определен с неравенствата

$$2012 \leq x \leq 2016, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi - \sin 4x}{3 - \cos x}$$

Отг. 3.571780373003938

28. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията  $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -1 + \cos 4x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ \sin 3x, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

Отг. -2; 1

29. Дадена е функцията  $f(x) = x^2 - 3x + \pi$ .

Колко реални корена има уравнението  $f(x) = f(f(f(x)))$ ?

Отг. 4

30. Да се реши матричното уравнение  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 8 & 96 \\ 192 & 60 & 447 \\ 108 & 32 & 258 \end{pmatrix}$ .

Отг.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

---

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.