

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

ЧАСТ 2

21. Дадено е множеството от естествени числа $S = \{1, 2, \dots, 2017\}$. Колко са 2-елементните подмножества на S , за които произведението на двете числа не се дели на 3? Колко са 3-елементните подмножества на S , за които произведението на трите числа се дели на 4?
22. Да се намери най-малкото естествено число n , за което $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} > 2017$.
23. Да се намери най-голямото цяло число a , за което лицето на криволинейния трапец, заграден от кривата $y = e^{x^2}$ и правите $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, е по-малко от 2017^{2017} .
24. Да се намерят глобалните екстремуми на функцията $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ върху затворената област, определена от неравенствата $x^2 + (y + 1)^2 \leq 4$, $y \geq -1$ и $y \leq x + 1$.
25. Функцията $\pi(n)$, дефинирана в множеството на естествените числа \mathbb{N} , дава броя на простите числа, по-малки или равни на n . През 2010 г. Pierre Dusart доказва, че $\pi(n) > \frac{n}{\ln(n)-1}$ за всяко $x \geq N_1$ и $\pi(n) < \frac{n}{\ln(n)-1,1}$ за всяко $x \geq N_2$. Да се намерят числата N_1 и N_2 , ако е известно, че $4000 \leq N_1 \leq 6000$ и $55000 \leq N_2 \leq 65000$.
26. Да се пресметне $\int_1^{\infty} \frac{x}{2017^x} dx$.
27. Да се пресметне обемът на тялото A , координатите на точките на което изпълняват неравенствата $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, $x^2 + y^2 < z$. Вярно ли е, че обемът на A е по-малък от обема на единичния куб?
28. Да се реши уравнението $e^{2x} + \sin(3x) = 4$.
29. Да се канонизира уравнението и да се начертае относно каноничната декартова координатна система кривата $c: 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 4y + 24 = 0$. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от дадената крива.
30. Да се намери и изобрази в полярна координатна система графиката на функцията $\rho = \rho(\theta)$, ако е известно, че $\rho'(\theta)2^{-\theta} - \ln 2 \cdot \cos(2\theta) = 0$ и $\rho\left(\log_2 \frac{\pi}{2}\right) = -0,7$.