СЕДМА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ, 26-28 ОКТОМВРИ 2018 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА В

1. Да се пресметне сумата $\frac{1^0}{2^1}-\frac{2^1}{3^2}+\frac{3^2}{4^3}-\frac{4^3}{5^4}+\ldots-\frac{2018^{2017}}{2019^{2018}}$

2. Да се реши уравнението $\begin{vmatrix} 1 & 2018 & 2018 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

3. Да се реши уравнението $x^x = 2018$

4. Да се намери дължината на кривата $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$

5. От кабел с дължина $L = 100$ см е отрязана част с дължина x, която е огъната във формата на окръжност. Останалата част е огъната във формата на квадрат. Намерете минимума на сумата от лицата на получените кръг и квадрат.

6. Да се намери сумата на първите 100 прости числа.

7. Ако x, y и a са реални числа, така че $x+y=2a-1$ и $x^2+y^2=a^2+2a-1$, да се намери най-малката стойност на функцията $f(a)=xy$.

8. Намерете всички решения в естествени числа на диофантовото уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{2}.$$

9. Намерете обема на ротационно тяло, получено от завъртането около оста Ox на областта, ограничена от линиите $y=1/(1+x^2)$ и $y=0$.

10. Функцията $y(x)$ е решение на диференциалното уравнение $2y''+3y'+4y=x.\sin(5x)$ при начални условия: $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Да се построи графиката на функцията $y(x)$ за $x\in[0,8]$

11. Да се пресметне сумата $1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$.

12. Дефинирайте функцията $f(x)=\begin{cases} \frac{10}{1+x^2}, x>3 \\ \frac{x^2}{9}, 0<x\le 3 \\ 1-e^x, x\le 0 \end{cases}$. Пресметнете f(-1), f(1), f(2), f(3), f(5).
Намерете минимума и максимума на функцията.

13. Намерете обема на тялото, образувано от ротацията на кривата $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$, около вертикалната ѝ асимптота.

14. Дадена е 10x10 матрицата $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \begin{cases} i+j-1, & \text{ако } i+j \le 11 \\ 21-i-j, & \text{ако } i+j > 11 \end{cases}$.

Да се пресметне детерминантата на матрицата A.

15. Намерете броя на всички диагонални матрици от трети ред, които нулират полинома $F(A) = A^3 - 3A + 2I_3$, където I_3 е единичната матрица от ред 3.

16. Дадена е редицата $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ при $n \ge 4$.
Да се пресметне сумата на първите 25 члена на тази редица.

17. Намерете най-малкото N, за което $N^{2018} < N!$

18. Да се намери лицето на фигурата, оградена от кривата, зададена с уравнението $y^2 = x^3(2-x)$, $0 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$.

19. Намерете най-голямата стойност на функцията $f(x)=\cfrac{2018}{x+\cfrac{2018}{x+\cfrac{2018}{x+\cfrac{2018}{x+\cfrac{2018}{x+2018}}}}}$ в интервала $[0,2018]$.

20. Да се намерят всички реални решения на уравнението $5\cos x = 4 - x^3$.

21. Да се начертаят на един чертеж графиките на функциите $y = \sqrt{1-(1-|x|)^2}$ и $y = \arccos(1-|x|) - \pi$. Да се намери лицето на фигурата, заградена от двете графики.

22. За редицата на Фибоначи $a_1 = 1, a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \ge 3,$ да се пресметне сумата от цифрите на a_{100}.

23. Да се начертае в полярна координатна система $O\rho\theta$ кривата $\rho = \rho(\theta)$, ако е известно, че $\rho'(\theta) + 10.\cos(5.\theta).\sin(5.\theta) - 3.\cos(3.\theta) = 0$ и $\rho(0) = 1{,}3$.

24. Да се намери обемът на тялото, дефинирано като общата част на вътрешностите на сферата, зададена с уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и конуса, зададен с уравнение $3y^2 = x^2 + z^2, y \ge 0$.

25. Да се пресметне максималната стойност на израза $a^2 + b^2$, където a и b са цели числа в интервала [1,2018], за които е изпълнено $(a^2 - ab - b^2)^2 = 1$.

26. Намерете границата $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x}{1+2018^x} dx$.

27. Представете x^5 като полином на $x - 2$.

28. Да се реши уравнението $e^{x^6} - 2018x^4 + 1 = 0$.

29. Да се начертаят графиките на функциите $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 20$ и $g(x) = x^2$ и да се намерят координатите на пресечните им точки.

30. Да се намери най-малката стойност на цялото число n, за която поне един от множителите (полиноми), на които се разлага полиномът $x^n - 1$, съдържа коефициент, различен от ± 1.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.