

ОСМА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - СОФИЯ
8-10 НОЕМВРИ 2019 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Да се намерят простите числа в редицата $\{20^n + 19^n\}$, $n=1, 2, 3, \dots, 2019$.
2. Да се намерят всички решения ($0 < x, y, z < 5$) на уравнението $x^{19} + y^{19} = z^{19} \pmod{5}$.
3. Да се намери максимумът на функцията $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & x^2 & x^3 \\ x & 0 & x & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 9 \end{vmatrix}$ в интервала $[0, 2019]$.
4. Измежду първите 2019 числа на Фибоначи да се намери броят на тези, които съдържат в десетичния си запис последователността 2019.
5. Да се реши уравнението $e^{20x} + 19\sin(x) = 2019$.
6. За кои естествени числа $n < 51$ полиномът $x^n + 2048$ може да се разложи на множители с цели коефициенти?
7. Кое е най-малкото естествено число k такова, че 2020_k (k -ична основа) няма различни цифри (има вида $xx\dots x$)?
8. Да се пресметне лицето на фигурата, ограничена от кривата $x^{20} + y^{20} = 1$. Вярно ли е, че фигурата закрива над 99% от квадрата с дължина на страната 2, който я съдържа?
9. Да се реши системата уравнения $x^y = 2018, y^x = 2019$.
10. Да се пресметне $\sqrt{2019 + \sqrt[3]{2019} + \sqrt[3]{2019} + \sqrt{2019}}$ с 20 знака точност.
11. Да се намерят всички 5-цифрени числа $N = \overline{abcde}$, чиито цифри удовлетворяват уравнението $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = 2019$ и $a < b < c < d < e$.
12. Да се намерят реалните числа a, b, c, d , за които е изпълнено твърдението относно $x, x \in \mathbb{C}$,

$$2x^5 - 2\sqrt{5}x - 2x + \sqrt{5} - 5 = 2(x^2 - x + a)(x^3 + bx^2 + cx + d)$$

(равенството трябва да е точно за всяко x).

13. Пресметнете интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy$.

14. Пресметнете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x \sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x} \dots \sqrt[n]{x} dx$.

15. За кои реални числа a, b и c , равенството $\int_0^\pi (ax + bx^2 + cx^3) \sin(mx) dx = \frac{1}{m^3}$ е в сила за *всяко* цяло положително число m ?
16. Да се намери броят на 3-елементните подмножества на $S = \{1, 2, 3, \dots, 219\}$, за които сумата от трите числа е просто число. Да се изведе простото число с максимална сума на цифрите му, както и тази сума.
17. Да се намери дължината на кривата $y = 1 - \ln(\cos x)$ за $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
18. Да се намери границата $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.
19. Да се намери най-малкото разстояние от точка върху сферата с уравнение $(x - 12)^2 + (y - 11)^2 + (z - 10)^2 = 9$ и равнината, минаваща през точка $A(1,2,0)$ и перпендикулярна на вектор $\vec{v}(1,1,1)$.
20. Да се начертаят графиките на кривите, зададени с уравненията $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ и $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ и да се намери лицето на фигурата, оградена от тези криви.
21. Колко са всички трицифрени прости числа, образувани от три последователни цифри в първите 2019 цифри след десетичната запетая на неперовото число e .
22. Да се определи броя на пресечните точки на окръжността $c: x^2 + y^2 = 36$ и елипсата $e: \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{36} = 1$ в зависимост от стойностите на параметъра $a, a \neq 0$.
23. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Да се намери матрица C , такава че $A \cdot B = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot B^{-1}$.
24. Да се изчисли $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[4]{3 + \sqrt[5]{4 + \dots \sqrt[2020]{2019}}}}}$.
25. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено от завъртането на графиката на функцията $y = f(x) = \ln(x^2)$, $x \in (0,1)$, около оста Oy . Да се визуализира полученото тяло.
26. Колко положителни числа има между първите 1000 члена на редицата $\{\cos(5^k), k \in \mathbb{N}\}$.
27. Да се намери най-малкото петцифрено просто число p , такова че $p+2$ също е просто число.
28. Да се пресметне $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{2^{|k|}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^k$.
29. Тетраедърът $ABCD$ има обем $V = 5m^3$, а три от върховете му са $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ и $C(2,-1,3)$. Четвъртият връх D лежи на оста Oy . Да се намерят координатите на D и височината на тетраедъра, спусната от върха D .
30. Да се генерира списък от всички трицифрени числа, които се делят на 51, записани в осмична бройна система.