ОСМА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - СОФИЯ

8-10 НОЕМВРИ 2019 г.

==

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА В

1. За кои $n<21$ полиномът x^n+1024 може да се разложи на множители с цели коефициенти?

2. Вярно ли е, че $\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}+\frac{1}{\sqrt[5]{5}+\frac{1}{\sqrt[6]{6}+\frac{1}{\sqrt[7]{7}}}}}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}+\frac{1}{\sqrt[5]{5}+\frac{1}{\sqrt[6]{6}}}}}}}$ е по-голямо от $\frac{1}{2019}$?

3. Да се изчисли $\sqrt{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{3+\sqrt[5]{4+\cdots+\sqrt[2020]{2019}}}}}$.

4. Да се пресметне $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{2^{|k|}}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^k$.

5. Да се изчисли лицето на фигурата, оградена от кривата с уравнение $y=-3+4x-x^2$ и допирателните ѝ в точките $A(0,-3)$ и $B(3,0)$. Направете чертеж.

6. Измежду първите 10000 прости числа намерете тези, които съдържат в десетичния си запис последователността 2019.

7. Колко десетични цифри има най-малкото число на Фибоначи, което започва с 2019?

8. Дадена е функцията $f(1)=19$, $f(n)=f(n-1)^2-2019$, $n>1$. Пресметнете $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ и покажете, че $f(5)$ също е просто число, а $f(2)$, $f(3)$ и $f(4)$ не са прости числа.

9. Намерете всички естествени числа M с не повече от 4 цифри, такива че 2019 дели $M^{2019}-1$.

10. Покажете, че целите части на числата $\sqrt{2019+\sqrt[3]{2019}}-\sqrt[3]{2019+\sqrt[4]{2019}}$ и $\sqrt{2019+\sqrt[3]{2019}}-\sqrt[3]{2019+\sqrt[4]{2019}}-\sqrt[4]{2019+\sqrt[5]{2019}}$ са точни степени на естествени числа.

11. Намерете най-малкото N, за което $2019^N < N!$

12. Намерете всички петцифрени числа $N=\overline{abcde}$, чиито цифри удовлетворяват равенството $a^1+b^2+c^3+d^4+e^5=2019$.

13. Дадени са 9 кутии, номерирани с числата от 1 до 9. В шест от кутиите трябва да се постави по едно число от 1 до 4, а три от кутиите трябва да останат празни. По колко различни начина може да бъде направено това?

14. Колко са всички трицифрени прости числа, образувани от три последователни цифри в първите 2019 цифри след десетичната запетая на неперовото число e?

15. Да се изчисли обемът на ротационното тяло, което се получава при въртенето на кръга $(x-1)^2+y^2 \le 1$ около оста Oy.

16. Да се намери най-малкото разстояние от точка върху сферата с уравнение $(x-12)^2+(y-11)^2+(z-10)^2=9$ и равнината, минаваща през точката $A(1,2,0)$ и перпендикулярна на вектора $\vec{v}(1,1,1)$.

17. Тетраедърът ABCD има обем $V=5m^3$, а три от върховете му са A(2,1,-1), B(3,0,1) и C(2,-1,3). Четвъртият връх D лежи на оста Oy. Да се намерят координатите на D и височината на тетраедъра, спусната от върха D.

18. Пресметнете лицето на фигурата, ограничена от кривата $x^{20}+y^{20}=1$. Вярно ли е, че фигурата закрива над 99% от квадрата с дължина 2, който я съдържа?

19. Пресметнете интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

20. Пресметнете интеграла $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty}\left(x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x\ldots\sqrt[n]{x}}}}}\right)dx$

21. Дадена е функцията $F(x)=\int\limits_0^x 2te^{-t^2}dt$, $x \ge 0$. Определете обема на тялото, образувано от ротацията на кривата $F(x)$ около хоризонталната ѝ асимптота.

22. Да се намери дължината на кривата $y = 1 - \ln(\cos x)$ за x от 0 до $\frac{\pi}{6}$.

23. Да се намери сборът на обемите на двете ротационни тела, получени от завъртането на графиката на функцията $y=\ln(x)$, $x \in (0,1)$, около оста Oy и около оста Ox.

24. Да се изчисли обемът на ротационното тяло, което се получава при въртенето на елипсата $4x^2+9y^2=36$ около малката ѝ ос.

25. Решете уравнението $e^{20x}+19.\sin(x)=2019$

26. Да се намери полином от най-ниска степен, чиято графика минава през точките A(1 ,-96), B(7, -84), C(-2, -75) и D(14, 21).

27. Да се реши матричното уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

28. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Да се намери матрица C, такава че $A.B = A^{-1}.C^{-1}.B^{-1}$.

29. Намерете максимума на функцията f(x) = $\begin{vmatrix} 2 & x & x^2 & x^3 \\ x & 0 & x & x^2 \\ x & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 9 \end{vmatrix}$ в интервала [0, 2019].

30. Нека M е множеството от всички 4x4 матрици, чиито елементи са равни на ± 1.
Да се намери $\max\limits_{A\in M}\det(A)$.