**ДЕВЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА**

**ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАД. СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“**

**28-30 октомври 2022 г., гр. Банкя**

**Софийски университет „Св. Климент Охридски“**

==================================================================

## ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Нека $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=183$ и $b\sqrt{a}+a\sqrt{b}=182$. Да се пресметне стойността на израза $A=\frac{9}{5}(a+b)$.

2. Начертайте кривата, зададена с параметричните уравнения
$$x=2\cos t\,.\sin 4t,\qquad y=2\sin t\,.\sin 4t\,,\qquad t\in[0,2\pi]\,,$$
и намерете нейната дължина.

3. Да се намери най-голямото естествено число, което е равно на 10-ата степен на сбора от цифрите си.

4. Нека $x_1,x_2,\dots,x_{10}$ са корените на уравнението $x^{10}=x+1$. Да се пресметне
$$\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{(1-x_i)^2}.$$

5. Щастливо наричаме естествено число, за което след като сумираме квадратите на цифрите му получаваме число, за което отново сумираме квадратите на цифрите и прилагайки тази процедура няколко пъти, получаваме 1. Проверете щастливи ли са числата 1999, 2021 и 2030.

6. Намерете за коя стойност на естественото число $n\le 2022$, редицата $\{i^2+i+n,\ \ i=0,1,\dots,n\}$ съдържа най-много последователни прости числа.

7. Дадена е рекурентна редица, дефинирана чрез:
$$a_0=0,\ \ a_1=\frac{1}{2},\ \ a_{n+1}=\frac{1}{3}(1+a_n+a_{n-1}^3),\ \ n=1,2,\dots$$
Да се намери границата $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

8. За всеки две положителни числа $a$ и $b$ е дефинирана бинарната операция $\diamond$ по следния начин: $a\diamond b=\frac{a+b}{1+a.b}$. Да се пресметне $(\cdots(((2\diamond 3)\diamond 4)\diamond 5)\diamond\cdots)\diamond 2022$.

9. Да се намерят стойностите на реалния параметър $a$, за които даденото уравнение има точно два реални корена:
$$\log_a(2|3|x-5|-9|)=2+3\log_a 2+2\log_a 3\,.$$

10. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

11. На един чертеж да се начертаят графиките на функцията $f(x)=x^2-\sin x+1$ и допирателната права към графиката на $f$ в точката с абсциса $x=1$.

12. Да се реши матричното уравнение $\begin{pmatrix}1&-2&2\\1&3&-5\\-2&-2&6\end{pmatrix}.X=\begin{pmatrix}0&4&-2\\-2&1&0\\8&-4&4\end{pmatrix}$.

13. Намерете най-малкото естествено число $n$, за което $2022^n<n!$ .

14. Редицата $\{a_n\}, n = 0,1,2,\dots$ е такава, че $\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$. Да се пресметне $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

15. За всяко естествено число $n$, с $a_n$ означаваме броя на точките в равнината с целочислени координати, които се намират в кръга с център $O(0,0)$ и радиус $\sqrt{n}$ (включително лежащите по контура на кръга). Да се намери най-малкото число $n$, за което $a_n > 100000$.

16. Пресметнете $\displaystyle\int_0^2 \int_{-x}^{x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$.

17. Намерете броя на естествените числа $n \leq 2022$, такива че $n^{2022} + 2022$ е просто число.

18. Равнинните криви, зададени с уравненията
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{и} \quad 4x - 3y = 25,$$
заграждат ограничената и затворена област $D$. Да се начертае областта $D$ и да се намерят координатите на центъра на тежестта на $D$.

19. Намерете максимума на функцията $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ при $x \in [0,1]$.

20. Измежду първите 20000 прости числа намерете броя на тези, които съдържат в десетичния си запис последователността 2022.

21. Решете уравнението $e^{20x} + 22 \sin x = 2022$.

22. За кои $n < 51$ полиномът $x^n + 2048$ може да се разложи на множители с цели коефициенти?

23. Намерете всички трицифрени естествени числа $M$, за които 2022 дели $M^{2022} - 1$.

24. Покажете, че целите части на числата
$\sqrt{2022 + \sqrt[3]{2022}} - \sqrt[3]{2022 + \sqrt[4]{2022}}$ и $\sqrt{2022 + \sqrt[3]{2022}} - \sqrt[3]{2022 + \sqrt[4]{2022}} - \sqrt[4]{2022 + \sqrt[5]{2022}}$
са точни степени на естествени числа.

25. Покажете, че ако $a$ е най-малкият реален корен на уравнението $x^4 - 2022x + 2022 = 0$,
то $a^{2022} > e$, където $e$ е Неперовото число.

26. Даден е тетраедър с върхове $A(-10,0,-8)$, $B(7,5,2)$, $C(3,-4,13)$, $D(5,10,15)$. Да се намери $\sin \varphi$, където $\varphi$ е ъгълът между ръба $AD$ и равнината $(ABC)$.

27. Решете системата уравнения $(x+y)^{\,y} = 2019$, $(x+y)^{\,x} = 2022$. Вярно ли е че $x > y$?

28. Да се намери дължината на кривата $y = 1 - \ln(\cos x)$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

29. Да се намерят реални числа $a, b, c, p, q$, такива, че
$$2x^5 - 2\sqrt{5}x - 2x + \sqrt{5} - 5 = 2(x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$$
да бъде изпълнено тъждеството за всяко комплексно число $x$.

30. Графиките на функциите
$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad \text{и} \quad g(x) = 6\cos(x-1)$$
заграждат ограничената и затворена област $G$. Да се намери реално число $a$, така че правата с уравнение $x = a$ разделя областта $G$ на две равнолицеви части.