

ДЕВЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА  
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАД. СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

28-30 октомври 2022 г., гр. Баня

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА Б

1. Нека  $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 183$  и  $b\sqrt{a} + a\sqrt{b} = 182$ . Да се пресметне стойността на израза  $A = \frac{9}{5}(a + b)$ .

2. Да се реши матричното уравнение  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ .

3. Да се намери границата  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ .

4. Покажете, че цялата част на числото  $\sqrt{2022 + \sqrt[3]{2022}} - \sqrt[3]{2022 + \sqrt[4]{2022}}$  е точна степен на естествено число.

5. Начертайте кривата, зададена с параметричните уравнения  $x = 2 \cos t \cdot \sin 4t$ ,  $y = 2 \sin t \cdot \sin 4t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , и намерете нейната дължина.

6. За всеки две положителни числа  $a$  и  $b$  е дефинирана бинарната операция  $\diamond$  по следния начин:  $a \diamond b = \frac{a+b}{1+a \cdot b}$ . Да се пресметне  $(\dots(((2 \diamond 3) \diamond 4) \diamond 5) \diamond \dots) \diamond 2022$ .

7. Да се намери най-голямото естествено число, което е равно на 10-ата степен на сбора от цифрите си.

8. Нека  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  са корените на уравнението  $x^{10} = x + 1$ . Да се пресметне  $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{(1-x_i)^2}$ .

9. Щастливо наричаме естествено число, за което след като сумираме квадратите на цифрите му получаваме число, за което отново сумираме квадратите на цифрите и прилагайки тази процедура няколко пъти, получаваме 1. Проверете щастливи ли са числата 1999, 2021 и 2030.

10. Намерете за коя стойност на естественото число  $n \leq 2022$ , редицата  $\{i^2 + i + n, i = 0, 1, \dots, n\}$  съдържа най-много последователни прости числа.

11. Дадена е рекурентна редица, дефинирана чрез:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3), \quad n = 1, 2, \dots$$

Да се намери границата  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

12. Да се намерят стойностите на реалния параметър  $a$ , за които даденото уравнение има точно два реални корена:

$$\log_a(2|3|x - 5| - 9|) = 2 + 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3.$$

13. На един чертеж да се начертаят графиките на функцията  $f(x) = x^2 - \sin x + 1$  и допирателната права към графиката на  $f$  в точката с абсциса  $x = 1$ .
14. Намерете най-малкото естествено число  $n$ , за което  $2022^n < n!$ .
15. Редицата  $\{a_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$  е такава, че  $\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ . Да се пресметне  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ .
16. За всяко естествено число  $n$ , с  $a_n$  означаваме броя на точките в равнината с целочислени координати, които се намират в кръга с център  $O(0,0)$  и радиус  $\sqrt{n}$  (включително лежащите по контура на кръга). Да се намери най-малкото число  $n$ , за което  $a_n > 100000$ .
17. Пресметнете  $\int_0^2 \int_{-x}^x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$ .
18. Намерете броя на естествените числа  $n \leq 2022$ , такива че  $n^{2022} + 2022$  е просто число.
19. Намерете максимума на функцията  $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$  при  $x \in [0,1]$ .
20. Измежду първите 20000 прости числа намерете броя на тези, които съдържат в десетичния си запис последователността 2022.
21. Решете уравнението  $e^{20x} + 22 \sin x = 2022$ .
22. За кои  $n < 51$  полиномът  $x^n + 2048$  може да се разложи на множители с цели коефициенти?
23. Намерете всички трицифрени естествени числа  $M$ , за които 2022 дели  $M^{2022} - 1$ .
24. Покажете, че ако  $a$  е най-малкият реален корен на уравнението  $x^4 - 2022x + 2022 = 0$ , то  $a^{2022} > e$ , където  $e$  е Неперовото число.
25. Даден е тетраедър с върхове  $A(-10,0,-8)$ ,  $B(7,5,2)$ ,  $C(3,-4,13)$ ,  $D(5,10,15)$ . Да се намери  $\sin \varphi$ , където  $\varphi$  е ъгълът между ръба  $AD$  и равнината  $(ABC)$ .
26. Решете системата уравнения  $(x+y)^y = 2019$ ,  $(x+y)^x = 2022$ . Вярно ли е че  $x > y$ ?
27. Да се намери дължината на кривата  $y = 1 - \ln(\cos x)$  за  $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ .
28. Пресметнете интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$ .
29. Да се намерят реални числа  $a, b, c, p, q$ , такива, че  $2x^5 - 2\sqrt{5}x - 2x + \sqrt{5} - 5 = 2(x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$  да бъде изпълнено тъждеството за всяко комплексно число  $x$ .
30. Пресметнете лицето на фигурата, ограничена от кривата  $x^{20} + y^{22} = 1$ . Вярно ли е че фигурата закрива над 99% от квадрата с дължина 2, който я съдържа?